速習・線形代数 練習問題

【練習問題 1】 次の関数のうち、線形性を持つ関数はどれでしょうか。定義に従って調べてみましょう。（1つとは限りません。）

(a) $f(x) = (1/2)x + 2$

(b) $f(x) = 4x$

(c) $f(x) = 5x^2$

(d) $Sf(x) = \frac{1}{3}x$

(e) $f(x) = 3$

【練習問題 2】次のベクトルの次元は何次元でしょうか。

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ (b)\ \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{pmatrix}\ (c)\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

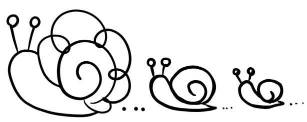
【練習問題 3】次のベクトルの計算をしてみましょう。

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\ (b)\ 3\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}\ (c)\ 2\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

【練習問題 4】次のベクトルの内積を計算してみましょう。

$$(a)\ < \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} >\ (b)\ < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} >\ (c)\ < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

【練習問題 5】次のベクトルのノルムを計算してみましょう。



$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} (b)\ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} (c)\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

【練習問題 6】例に従って次のベクトルの集まりが一次独立であることを証明してみましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

【練習問題 7】例に従って次のベクトルの集まりが 4 次元ベクトル空間 V の基底であることを証明してみましょう。

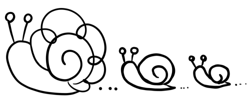
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

【練習問題 8】次の行列の丸で囲まれた成分は何行何列目の成分でしょうか。

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} (b) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \\ i & j \end{pmatrix} (c) \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x & \dots & x_{kn} \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

【練習問題 9】次の行列の転置行列を求めてみましょう。

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} (b) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} (c) \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$$



【練習問題 11】他の行列と単位行列をかけても変わらないことを確かめてみましょう。また、他の行列と零行列を足しても変わらないことを確認してみましょう。

【練習問題 12】次の連立方程式を行列の掃き出しを使って計算しましょう。

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ 2x + 3y - z = 9 & (2) \\ -x - 2y + 3z = -11 & (3) \end{cases}$$

ヒント: 行列の基本変形を使って $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \diamondsuit \\ 0 & 1 & 0 & \heartsuit \\ 0 & 0 & 1 & \clubsuit \end{pmatrix}$ の形の行列を生成します。

【練習問題 13】次の行列の行列式を計算しましょう。

$$(a)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 6 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} (b)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

【練習問題 14】正方行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とある数 α に対して 次を確認することでトレースの線形性を確かめてみましょう。

$$\mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}) = \mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}) + \mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix})$$

$$\mathrm{Tr}(\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}) = \alpha \mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix})$$

【練習問題 15】線形変換 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ある数 α に対して 次を確認することで線形変換の線形性を確かめてみましょう。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} (\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

【練習問題 16】行列の上三角化、対角化について調べてみましょう。