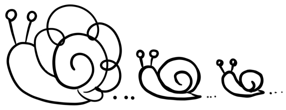
【練習問題 1】
(b),(d)

【練習問題 2】
(a) 2 次元 (b) 7 次元 (c) m 次元

【練習問題 3】
(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$

【練習問題 4】
(a) 44 (b) 61 (c) 0

【練習問題 5】
(a) $2\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{14}$ (c) $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2}$



【練習問題 6】
ある数 $a_1, a_2, a_3, a_4$ に対して、

$$a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_3+a_4 \\ a_3 \\ 2a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、明らかに $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ である。また、$a_1+a_3+a_4 = 0$ も $a_3 = a_4 = 0$ より $a_1 = 0$ が成り立つ。よって $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ より、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立である。

【練習問題 7】
まず $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が一次独立であることを示す。ある数 $a_1, a_2, a_3, a_4$ に対して

$$a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、明らかに $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ である。よって $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は

一次独立である。

次に 4 次元ベクトル空間 V を張ることを示す。任意の $V$ の要素 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、$x$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表すことができた。

以上より $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 4 次元ベクトル空間 $V$ の基底であることが示された。

【練習問題 8】

(a)(2,5) 成分 (b) (4,1) 成分 (c) (k,j) 成分

【練習問題 9】

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{1m} & x_{2m} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$

【練習問題 10】

(a) $3 \times 2$ 行列と $3 \times 1$ 行列の掛け算のため、計算できない。

(b) $\begin{pmatrix} ak + bw & al + bx & am + by & an + bz \\ ck + dw & cl + dx & cm + dy & cn + dz \end{pmatrix}$

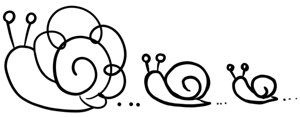
(c) $\begin{pmatrix} x_{11}y_1 + x_{12}y_2 + \cdots + x_{1m}y_m \\ x_{21}y_1 + x_{22}y_2 + \cdots + x_{2m}y_m \\ \vdots \\ x_{n1}y_1 + x_{n2}y_2 + \cdots + x_{nm}y_m \end{pmatrix}$

【練習問題 11】

例えば $3 \times 3$ の単位行列と零行列などで試してみると、変わらないことが確かめられる。

【練習問題 12】

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ -1 & -2 & 3 & -11 \end{pmatrix}
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ -1 & -2 & 3 & -11 \end{pmatrix} && (1) \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & -11 \end{pmatrix} && (2) \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & -11 \end{pmatrix} && (3) \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} && (4) \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} && (5) \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} && (6)
\end{aligned}
$$



(1) 1 行目を-2 倍したものを 2 行目に足す
(2) 1 行目を 1 倍したものを 3 行目に足す
(3) 2 行目を-1 倍したものを 1 行目に足す
(4) 2 行目を 1 倍したものを 3 行目に足す
(5) 3 行目を-4 倍したものを 1 行目に足す
(6) 3 行目を 3 倍したものを 2 行目に足す
よって、

$$
\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}
$$

であることがわかる。

【練習問題 13】
(a)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 6 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}
$$

より $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 6 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times -1 \times 7 = -14$ である。

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

より、3 行目がすべて 0 になるから、行列式は 0 である。

【練習問題 14】

$3 \times 3$ の正方行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とある数 $\alpha$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}) &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + (a_{33} + b_{33}) \\
&= (a_{11} + a_{22} + a_{33}) + (b_{11} + b_{22} + b_{33}) \\
&= \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}) &= \alpha a_{11} + \alpha a_{22} + \alpha a_{33} \\
&= \alpha(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \\
&= \alpha \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より線形性が確認できた。一般には、正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ とある数 $\alpha$ に対して、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\
&= \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\alpha A) &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii}) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\
&= \alpha \mathrm{Tr} A
\end{aligned}
$$

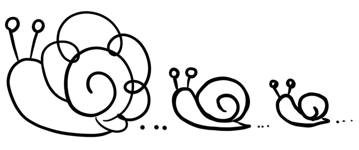
より線形性が確認できた。

【練習問題 15】

線形変換 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$、ある数 $\alpha$ に対して

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) + a_{13}(x_3 + y_3) \\ a_{21}(x_1 + y_1) + a_{22}(x_2 + y_2) + a_{23}(x_3 + y_3) \\ a_{31}(x_1 + y_1) + a_{32}(x_2 + y_2) + a_{33}(x_3 + y_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{12}x_3) + (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{12}y_3) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{22}x_3) + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{22}y_3) \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{32}x_3) + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{32}y_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{12}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{22}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{32}x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{12}y_3 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{22}y_3 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{32}y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(\alpha x_1) + a_{12}(\alpha x_2) + a_{13}(\alpha x_3) \\ a_{21}(\alpha x_1) + a_{22}(\alpha x_2) + a_{23}(\alpha x_3) \\ a_{31}(\alpha x_1) + a_{32}(\alpha x_2) + a_{33}(\alpha x_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ \alpha(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ \alpha(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$



より、線形性が確認できた。一般に、線形変換 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ と $n$ 次元ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$、ある数 $\alpha$ に対して、

$$A(x+y) = Ax + Ay$$

$$A(\alpha x) = \alpha Ax$$

が成り立つ。$3 \times 3$ の線形変換のときと同様に計算することが可能なのでぜひ確かめられたい。

【練習問題 16】
行列の**上三角化**とは、任意の $n \times n$ 正方行列 $P$ に対してある $n \times n$ 正則行列 $P$ が存在して、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \huge{*} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \huge{0} & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とすることである。*の部分には何らかの成分が入っていて、0 の部分の成分はすべて 0 である。
また行列の**対角化**とは、任意の $n \times n$ 正方行列 $P$ に対してある $n \times n$ 正則行列 $P$ が存在して、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \huge{0} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \huge{0} & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とすることである。

本の中でも紹介したとおり、上三角行列の対角成分はその行列の固有値となっているため $\lambda_1\lambda_2\dots\lambda n$ は上三角行列の固有値であるが、重要な事実として、$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda n$ は $A$ の固有値でもある。

最も簡単な例として、$n \times n$ の正方行列 $A$ に対して $A$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ がすべて異なるとする。また $x_1, x_2, \dots, x_n$ を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ に対応する固有ベクトル、すなわち

$$Ax_i = \lambda_i x_i \ (i = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つとする。このとき、$P$ を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を並べた行列、すなわち

$$P = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$$

とすれば、$P$ は正則行列となる（この事実は専門書等で確認されたい）。そのため、$P$ の逆行列 $P^{-1}$ が存在し、

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}A[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n] \\
&= P^{-1}[Ax_1\ Ax_2\ \ldots\ Ax_n] \\
&= P^{-1}[\lambda_1 x_1\ \lambda_2 x_2\ \ldots\ \lambda_n x_n] \\
&= P^{-1}[x_1 x_2 \ldots x_n]\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= P^{-1}P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= I\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり、対角化された。